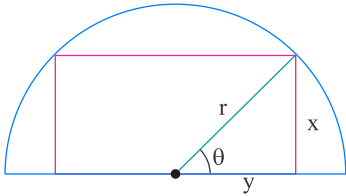




گزینه ۱

۱



می‌دانیم  $\sin \theta = \frac{x}{r}$  و  $\cos \theta = \frac{y}{r}$ ، پس  $x = r \sin \theta$  و  $y = r \cos \theta$  خواهد بود.  
از طرفی مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = 2yx$$

پس داریم:

$$S = 2(r \cos \theta)(r \sin \theta) = r^2 \underbrace{(2 \sin \theta \cos \theta)}_{\sin 2\theta} = r^2 \sin 2\theta$$

ماکزیمم عبارت بالا وقتی رخ می‌دهد که  $\sin 2\theta = 1$  باشد، یعنی ماکزیمم مساحت  $r^2$  می‌شود.

گزینه ۳

۲

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3}$$

تابع  $f'$  را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} f' & - & -2 & + & 0 \\ & & & & \text{نقطه} \end{array}$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که روی آن  $f$  صعودی است،  $(-2, 0)$  می‌باشد. در نتیجه کمترین مقدار  $a$ ،  $-2$  خواهد بود.

$$f'(x) = 3x^2(\sqrt{x+2}) + x^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right) = \frac{6x^2(x+2) + x^3}{2\sqrt{x+2}} = 0$$

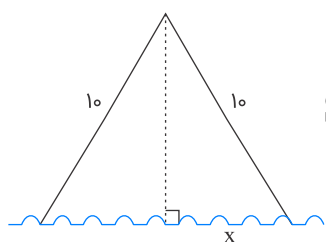
$$\Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x^2 = 0 \Rightarrow 7x^3 + 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2(7x + 12) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \frac{-12}{7}$$

همچنین  $x = -2$  انتهای بازه و بحرانی است:  $\{0, \frac{-12}{7}, -2\}$

راه حل اول:

طول قاعده مثلث را  $2x$  در نظر می‌گیریم. در این صورت از رابطه فیثاغورس ارتفاع مثلث برابر است با:  $\sqrt{100 - x^2}$  و مساحت مثلث برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} \times 2x \times \sqrt{100 - x^2} = x\sqrt{100 - x^2} \quad ; x \in (0, 10)$$

پیدا کردن ماکزیمم مطلق تابع:

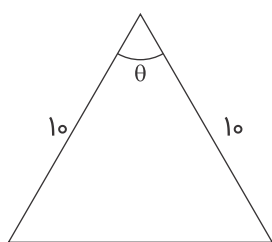
$$\begin{aligned} S' &= \sqrt{100 - x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} \\ &= \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow x^2 = 50 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{50} \xrightarrow[\text{و اول و آخر بازه}]{\text{نقاط بحرانی}} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} S = 0 \\ x = \sqrt{50} \Rightarrow S = 50 \text{ (max)} \\ x = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 10} S = 0 \end{cases}$$

پس حداکثر مساحت مثلث ۵۰ است.

راه حل دوم:

اگر زاویه رأس را  $\theta$  در نظر بگیریم، مساحت مثلث برابر است با:

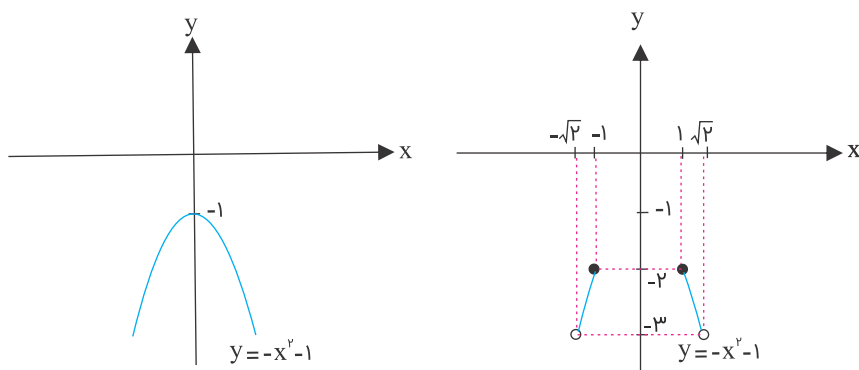


$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin \theta = 50 \sin \theta$$

حداکثر مقدار  $50 \sin \theta$  برابر است با ۵۰، چون حداکثر آن زمانی اتفاق می‌افتد که  $\sin \theta = 1$  باشد، یعنی  $\hat{\theta} = 90^\circ$  باشد. در این صورت مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه است.

$$[x^2 - 1] = 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 - 1 < 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < \sqrt{2} \\ \text{یا} \\ -\sqrt{2} < x \leq -1 \end{cases}$$

حال باید نمودار  $f(x) = -x^2 - 1$  را در فاصله بالا رسم کنیم:



مطابق شکل، ماکزیمم تابع برابر  $-2$  است و مینیمم ندارد، چرا که برد تابع برابر  $[-2, -3)$  است.

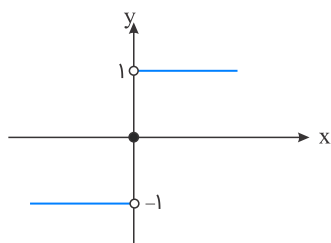
$$\text{گزینه ۱: } y = \left[ \underbrace{x - [x]}_{\in \mathbb{Z}} \right] = [x] - [x] = 0$$

تابع ثابت  $y = 0$  است و همه نقاط  $\mathbb{R}$  بحرانی هستند.

گزینه ۲) تابع ثابت  $y = 0$  است و همه  $x \in \mathbb{R}$  بحرانی است.

$$y = \left[ 0 \leq \frac{|x|}{|x| + 1} < 1 \right] = 0$$

$$\text{گزینه ۳: } y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$



همه اعداد  $x \in \mathbb{R}$  بحرانی است یا مشتق صفر است و در  $x = 0$  هم تابع ناپیوسته و مشتق ناپذیر و بحرانی است.

$$\text{گزینه ۴: } y = \tan x \cdot \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

همه  $x \in \mathbb{R} - \{x = \frac{k\pi}{2}\}$  بحرانی هستند. نقاط  $x = \frac{k\pi}{2}$  که  $k \in \mathbb{Z}$  بحرانی نیستند، چرا که در دامنه نیستند.

$$f(x) = \sqrt[3]{-x^3 + 2x^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{-3x^2 + 4x}{3\sqrt[3]{(-x^3 + 2x^2)^2}} = \frac{x(-3x + 4)}{3\sqrt[3]{(x^2(-x + 2))^2}} = \frac{x(-3x + 4)}{3\sqrt[3]{x^4(-x + 2)^2}} \\ &= \frac{-3x + 4}{3\sqrt[3]{x(-x + 2)^2}} \end{aligned}$$

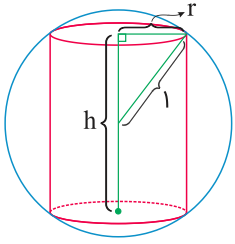
$$\Rightarrow \begin{cases} -3x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \\ x(-x + 2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

حال  $f'(x)$  را تعیین علامت می‌کنیم:

|       |           |     |               |   |           |   |
|-------|-----------|-----|---------------|---|-----------|---|
| x     | $-\infty$ | ۰   | $\frac{4}{3}$ | ۲ | $+\infty$ |   |
| f'(x) | -         | ت.ن | +             | - | ت.ن       | - |
| f(x)  |           |     |               |   |           |   |

باتوجه به جدول، تابع  $f(x)$  در دو نقطه  $\frac{4}{3}$ ،  $x = 0$  دارای اکسترمم نسبی است.

اول برای اطلاعات داده شده یک شکل رسم می‌کنیم:



در مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شده، رابطه فیثاغورس می‌نویسیم:

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = l^2$$

$r^2$  را بر حسب  $h$  می‌نویسیم:

$$r^2 = l^2 - \frac{h^2}{4}$$

حجم استوانه برابر است با:

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(l^2 - \frac{h^2}{4}\right) h = \pi \left(l^3 h - \frac{h^4}{4}\right)$$

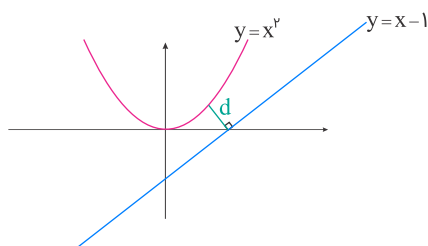
از  $V$  مشتق می‌گیریم:

$$V' = \pi \left(l^3 - \frac{h^3}{1}\right)$$

ریشه‌های  $V'$  را حساب می‌کنیم:

$$V' = 0 \Rightarrow l^3 - \frac{h^3}{1} = 0 \Rightarrow h^3 = l^3 \xrightarrow{h>0} h = l$$

ابتدا شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم.



می‌خواهیم فاصله  $A(\alpha, \alpha^2)$  روی  $y = x^2$  کمترین فاصله را از خط  $y - x + 1 = 0$  داشته باشد. می‌دانیم فاصله  $A(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  به صورت  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید. پس داریم:

$$d = \frac{|-\alpha + \alpha^2 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}}$$

برای اینکه این فاصله کمترین مقدار خود شود باید داخل قدر مطلق یعنی  $-\alpha + \alpha^2 + 1$  کمترین مقدار شود:

$$-1 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم: کمترین فاصله یک منحنی از یک خط جایی است که در آن، بتوان مماس به موازات آن خط کشید، شیب منحنی  $y = x^2$  از دستور  $y' = 2x$  را برابر شیب خط  $y = x - 1$  یعنی  $x = 1$  می‌گذاریم و داریم:

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

مشتق تابع را پیدا و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2 + 2x + 4) - (2x + 2)(x^2 + 4)}{(x^2 + 2x + 4)^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{(x^2 + 2x + 4)^2}$$

| x     | -۲ | ۲ |
|-------|----|---|
| f'(x) | +  | - |
| f(x)  |    |   |

باتوجه به جدول تعیین علامت، نمودار تابع در اطراف  $x = 2$  به شکل "۱" است.



توجه کنید که دامنه تابع برابر  $x \leq 2$  و  $x \geq -2$  است.  
مشتق تابع را پیدا می‌کنیم و نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

اگر  $f'(x) = 0$ ، آنگاه  $x = 0$  است.  
از طرف دیگر تابع در نقطه‌های  $x = 2$  و  $x = -2$  مشتق‌پذیر نیست.  
در نتیجه  $f$  دارای سه نقطه بحرانی است.

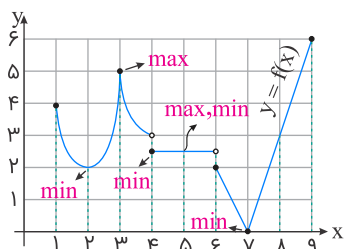
می‌دانیم نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه هستند که مشتق در آن‌ها صفر یا وجود ندارد. در چندجمله‌ای‌ها جواب‌های  $f'(x) = 0$  بحرانی‌اند.

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + (p+3) \Rightarrow f'(2) = 12 + 4p + p + 3 = 0$$

$$5p = -15 \Rightarrow p = \frac{-15}{5} = -3 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 - 6 \\ f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \end{cases}$$

ریشه‌های  $x = 0$  و  $x = 2$  نقاط بحرانی تابع‌اند.

توجه کنید که نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند.  
در بازه  $(4, 6)$  تابع ثابت است، بنابراین هر نقطه از این بازه هم مینیمم نسبی و هم ماکزیمم نسبی است. پس نقطه  $x = 5$  هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.  
در نتیجه تابع در  $x = 2$ ،  $x = 4$ ،  $x = 5$  و  $x = 7$  مینیمم و در  $x = 3$  و  $x = 5$  ماکزیمم نسبی دارد.



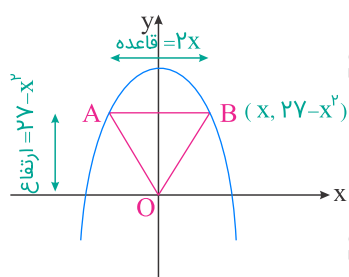
$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + a} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1(x^2 + a) + -2x(-x)}{(x^2 + a)^2} \leq 0$$

مخرج همواره مثبت است، پس فقط صورت را تعیین علامت می‌کنیم.

$$-x^2 - a + 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq a$$

باید جواب نامعادله بالا  $-2 \leq x \leq 2$  باشد، پس  $a = 4$  است.

مساحت مثلث را پارامتری می‌نویسیم:



$$S = \frac{2x(27 - x^2)}{2} = -x^3 + 27x$$

ریشه مثبت  $S'$  را حساب می‌کنیم:

$$S' = 0 \Rightarrow -3x^2 + 27 = 0 \Rightarrow x = 3$$

مقدار  $S$  را به ازای  $x = 3$  به دست می‌آوریم:

$$S_{\max} = S(3) = -27 + 81 = 54$$

اگر  $(-1, 2)$  اکسترمم نسبی تابع  $y = x^3 + ax^2 + b$  باشد، اولاً مشتق در  $x = -1$  صفر می‌شود، بنابراین:

$$y' = 3x^2 + 2ax \xrightarrow{x=-1} y'(-1) = 3 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

ثانیاً  $(-1, 2)$  در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + b \xrightarrow{(-1, 2)} 2 = -1 + \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

حاصل  $a + b$  برابر است با:

$$a + b = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

تابع  $f$  اکیداً صعودی است. چرا که عبارت‌های  $\sqrt{x^3}$  و  $-\frac{2}{x}$  به ازای مقادیر دامنه یعنی  $x > 0$  هر دو اکیداً صعودی هستند. به علاوه می‌توانیم با مشتق‌گیری هم آن را ثابت کنیم.

از طرفی  $-1 \leq \sin x \leq 1$  می‌باشد. اگر  $\sin x = t$  در نظر بگیریم، تابع  $y = f \circ g(x) = \sqrt{t^3} - \frac{2}{t}$  می‌شود، پس ماکزیمم این تابع را وقتی  $-1 \leq t \leq 1$  است، می‌خواهیم.

$$y = \sqrt{t^3} - \frac{2}{t}, \quad t \in [-1, 1]$$

سریع‌ترین راه حل این است که بگوییم چون  $y = \sqrt{t^3} - \frac{2}{t}$  اکیداً صعودی است بیشترین مقدار آن در  $t = 1$  رخ می‌دهد.

$$y(1) = \sqrt{1} - \frac{2}{1} = 1 - 2 = -1$$

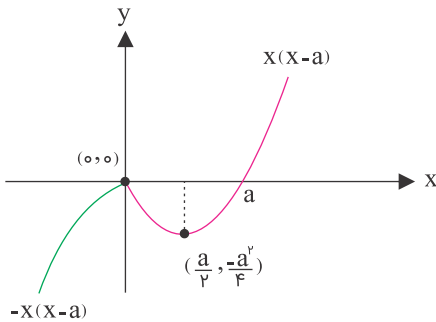
برای پیدا کردن ماکزیمم  $C(t)$ ، مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27} \Rightarrow C'(t) = \frac{3(t^3 + 27) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 27)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3 \times 27 - 9t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = \frac{27}{3} \Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

اول نمودار تابع  $y = (x - a)|x|$  را رسم می‌کنیم:

$$y = (x - a)|x| = \begin{cases} x(x - a) & ; x \geq 0 \\ -x(x - a) & ; x < 0 \end{cases}$$



مطابق شکل، ماکزیمم نسبی تابع نقطه  $(0, 0)$  و مینیمم نسبی آن  $(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4})$  است. فاصله این دو نقطه را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4}\right)^2} &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16}} = \sqrt{\frac{4a^2 + a^4}{16}} = \sqrt{2} \\ \Rightarrow 4a^2 + a^4 &= 32 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

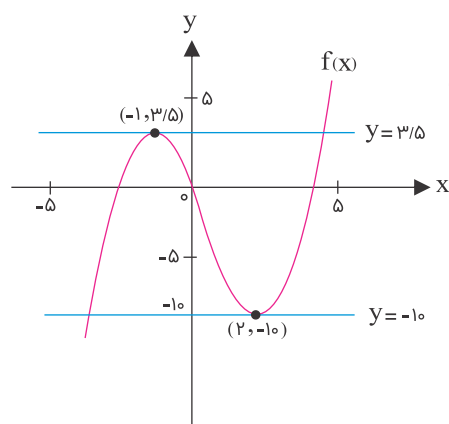
$$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x - 2)(x + 1)$$

با کمک جدول می‌توانیم نمودار را دقیق رسم کنیم.

|      |            |            |            |
|------|------------|------------|------------|
|      | -1         | 2          |            |
| $y'$ | +          | -          | +          |
| $y$  | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |
|      | max        | min        |            |

$$y(-1) = 3/5$$

$$y(2) = -10$$



حالا می‌خواهیم معادله  $x^3 = \frac{3}{2}x^2 + 6x + m$ ، دو ریشه داشته باشد؛ یعنی نمودار توابع  $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$  و  $y = m$  در ۲ نقطه باید باهم برخورد کنند. در این صورت  $m = 3/5$  یا  $m = -10$  است، پس مجموع مقادیر  $m$  برابر است با:  $-10 + 3/5 = -6/5$